www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE

EPREUVE COMMUNE DE **MATHEMATIQUES**

Durée : 3 heures

Coef. : 1

CONCOURS EXTERNES DE RECRUTEMENT DES INGENIEURS DES ETUDES ET DE L'EXPLOITATION DE L'AVIATION CIVILE

C.F. et C.T.

Session Mai 1990

Pour traiter une question, le candidat peut admettre les résultats de questions précédentes.

Il est demandé au candidat d'indiquer clairement le numéro de chaque question traitée.

Le candidat est invité à justifier clairement ses calculs.

PREAMBULE

P.1. : On donne ou on rappelle la définition ci-après :

par définition, une suite de nombres réels de terme général u_n est appelée "suite de Cauchy" si et seulement si :

à tout réel $\varepsilon > 0$ on peut associer un entier naturel $n_o(\varepsilon)$ tel que, pour tout entier $n \geqslant n_o(\varepsilon)$ et pour tout entier naturel p, on a $| u_{n+p} - u_n | \leqslant \varepsilon$.

P.2. : On admet ou on rappelle la propriété ci-après :

Toute suite de Cauchy de nombres réels converge vers un nombre réel.

P.3.: Soit une série convergente de terme général c_n réel : démontrer que, si on pose $s_n = c_o + c_1 + \ldots + c_n$, alors la suite de terme général s_n est une suite de Cauchy."

PARTIE I

I.1. : On considère deux suites de nombres réels : $a_1 , a_2 , \ldots , a_n , \ldots$;

$b_1 , b_2 , \ldots , b_n , \ldots$.

On pose alors : $A_p = a_1 + a_2 + \ldots + a_p$;

$$S_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_p b_p + \ldots + a_n b_n .$$

Etablir la relation :

(R1) $$S_n = A_1 (b_1 - b_2) + A_2 (b_2 - b_3) + \ldots + A_{p-1}(b_{p-1} - b_p) + \ldots$$

$$+ \ldots + A_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + A_n b_n$$

I.2. : On suppose que les suites de la question précédente satisfont simultanément aux conditions suivantes :

(C1) il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $p \geqslant 1$ on a : $|A_p| \leqslant M$;

(C2) la suite de terme général b_n est monotone et converge vers zéro.

Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $p \geqslant 0$ on a : $|S_{n+p} - S_n| \leqslant 2 M |b_{n+1}|$

.../...

et en déduire que la série numérique dont le terme général est le produit $a_n b_n$ est convergente.

I.3. : On rappelle qu'une série de terme général u_n est alternée s'il existe un entier naturel n_o tel que pour tout $n \geq n_o$ on a : $u_n \, u_{n+1} < 0$.

Déduire de ce qui précéde qu'une série alternée de terme général u_n, tel que la suite de terme général $|u_n|$ est décroissante et converge vers zéro, est une série convergente.

I.4. : Soit les fonctions de la variable réelle x définies pour tout entier $n > 0$ par :

$$f_n : x \longmapsto f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x} \quad .$$

a) Pour quelles valeurs de x la série de fonctions de terme général f_n est-elle : convergente ? absolument convergente ?

b) A quelle condition doit satisfaire x_1 pour que la série de fonctions de terme général f_n soit *normalement convergente* pour la norme de la convergence uniforme sur tout intervalle $[x_1 , x_2]$ vérifiant $x_1 < x_2$?

PARTIE II

II.1. : Soit n entier strictement positif et $x \neq 2 k\pi$ avec k entier relatif. Etablir les formules :

$$(F1) \quad \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin (2n + 1) \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \quad ;$$

$$(F2) \quad \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \sin (n + 1) \frac{x}{2} \; \frac{\sin n \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \quad .$$

II.2. : k étant entier naturel, n étant entier strictement positif et s étant réel, on définit, pour $x \neq 2 k \pi$, les fonctions réelles g_n et h_n , de la variable réelle x, respectivement par :

$$g_n : x \longmapsto \frac{1}{n^s} \sin nx \quad ,$$

$$h_n : x \longmapsto \frac{1}{n^s} \cos nx \quad .$$

Déduire de ce qui précède les valeurs de s pour lesquelles les séries de terme général respectif g_n et h_n sont simultanément simplement convergentes sur l'ensemble de définition de ces fonctions.

II. 3. : k étant entier naturel, on définit, pour tout $x \neq 2 k \pi$, la fonction réelle y_n , de la variable réelle x, par :

$$y_n : x \longmapsto y_n(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \ldots + \frac{1}{n} \sin nx.$$

.../...

a) Déterminer des expressions $v_n(x)$ et $w_n(t)$ telles que :

(F3) $y_n(x) = \frac{\pi - x}{2} + \frac{1}{2n+1}\left(v_n(x) + \int_{\pi}^{x} w_n(t)\,dt\right)$ où $0 < x < \pi$.

b) Soit α et β des réels tels que $0 < \alpha < \beta < \pi$. Déduire de (F3) que la suite de fonctions de terme général y_n converge uniformément sur l'intervalle $[\alpha , \beta]$ vers la fonction y définie par :

$$y : x \longmapsto \frac{\pi - x}{2}$$

II.4. a) Montrer que pour tout x, tel que $-\pi < x < 0$ ou $0 < x < \pi$, la série de fonctions de terme général

$$z_n : x \longmapsto z_n(x) = \frac{\sin n x}{n}$$

est convergente et déterminer la valeur de sa somme en fonction de celle de x.

b) Retrouver ces résultats en étudiant la série de Fourier en sinus et cosinus de la fonction réelle $\hat{g}$, impaire, 2π périodique, de la variable réelle x et définie pour $0 < x < 2\pi$ par $\hat{g}(x) = \pi - x$.

c) En déduire la limite, lorsque p tend vers l'infini, de la somme :

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + (-1)^p \frac{1}{2p+1} .$$

PARTIE III

III.1. Calculer les coefficients de la série de Fourier en sinus et cosinus de la fonction réelle $\hat{h}$, paire, 2π périodique, de la variable réelle x et définie pour $0 \leqslant x \leqslant \pi$ par $\hat{h}(x) = \pi - x$.

III.2. a) En déduire:

$$L = \lim_{p \to +\infty} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2p+1)^2}\right).$$

b) On pose $B_2 = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right)$. Etablir que :

$$L = B_2\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) .$$

En déduire B_2, puis :

$$L' = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}\right) .$$

.../...

III.3. Rapprochant la fonction $\widehat{h}$ de la fonction $\widehat{g}$ définie à la question II.4., montrer que deux séries de Fourier dont les sommes sont égales sur un intervalle ouvert inclus dans la période commune n'ont pas nécessairement des sommes identiques sur cette période.

III.4. On considère une série entière de terme général $c_n\, x^n$, de rayon de convergence égal à 1 et dont les coefficients c_n sont les termes d'une série numérique convergente.

On pose : $S_n(x) = c_0 + c_1\, x + \ldots + c_n\, x^n$.

a) Posant $s_n^p = c_n + c_{n+1} + \ldots + c_{n+p}$ et appliquant la relation (R1) établie à la question I.1., montrer que pour tout $0 \leqslant x \leqslant 1$ la suite des réels $S_n(x)$ est une suite de Cauchy.

b) En déduire que S_n étant la fonction définie pour tout $0 \leqslant x \leqslant 1$ par $S_n(x)$, alors la suite des fonctions S_n est uniformément convergente sur $[0, 1]$.

c) On désigne par C la somme de la série numérique de terme général c_n et pour $0 \leqslant x < 1$ on pose $\widehat{S}_n(x) = S_n(x)$.

Démontrer que :

$$C = \lim_{x \to 1} \left(\lim_{n \to +\infty} \widehat{S}_n(x) \right)$$

III.5. En application des résultats de III.4. :

a) Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

et, utilisant un théorème que l'on énoncera, donner un nombre rationnel approchant la valeur de cette somme par défaut avec une erreur inférieure à 2.10^{-1}.

b) ℓn désignant le logarithme népérien, établir la convergence de l'intégrale impropre :

$$I = \int_0^1 \frac{\ell n\,(1+x)}{x}\, dx.$$

Justifiant soigneusement chaque étape du calcul, déterminer le terme général d'une série numérique convergente dont I est la somme.
Donner le réel auquel I est égal.

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail